Лекция 5 «Уравнение неразрывности (сплошности) потока»

Цель: Дайте определение гидродинамики. Охарактеризуйте основные характеристики движения жидкостей. Приведите вывод уравнения неразрывности (сплошности) потока.

Краткий конспект лекции: Гидродинамика. Движущей силой при течении жидкостей является *разность давлений*, которая создается с помощью насосов или компрессоров либо вследствие разности уровней или плотностей жидкости.

Знание законов гидродинамики позволяет находить разность давлений, необходимую для перемещения данного количества жидкости с требуемой скоростью, а значит, и расход энергии на это перемещение, или наоборот – определять скорость и расход жидкости при известном перепаде давления.

Различают *внутреннюю* и *внешнюю* задачи гидродинамики. Внутренняя задача связана с анализом движения жидкостей внутри труб и каналов. Внешней задачей гидродинамики является изучение закономерностей обтекания жидкостями различных тел (при механическом перемешивании, осаждении твердых частиц в жидкости и т.п.).

Во многих случаях, например при движении жидкости через зернистый слой твердого материала, она перемещается внутри каналов сложной формы и одновременно обтекает твердые частицы. Такие условия наблюдаются в процессах фильтрования, массопередачи в аппаратах с насадками, в химических процессах, осуществляемых в реакторах с твердыми катализаторами, и т. д. Анализ движения жидкостей в случаях такой смешанной задачи гидродинамики проводят, как правило, приближенно сводя его к решению внутренней или внешней задачи.

Проведение процессов химической технологии обычно связано с перемещением жидкостей, газов или паров в трубопроводах и аппаратах, образованием или разделением гетерогенных систем (перемешивание, диспергирование, отстаивание, фильтрование и др.). Поскольку скорость всех этих процессов определяется законами гидродинамики, то их принято называть гидромеханическими процессами.

Законы гидродинамики имеют наиболее простую форму для жидкостей, в которых движение отдельных частей относительно других происходит без трения, а объем или плотность их не изменяется. Такие жидкости называются *идеальными*. Хотя ни одна реальная жидкость не удовлетворяет этим требованиям, тем не менее многие из них при определенных условиях могут рассматриваться как идеальные. Газы легко сжимаются, однако при скоростях их течения не больше 50 м/с изменение давления малы, а соответственно и изменение объема, поэтому к движению газов в этих условиях применительны законы движения идеальных жидкостей.

Основные характеристики движения жидкостей

Скорость и расход жидкости. Рассмотрим движение жидкости по трубе постоянного сечения.

Количество жидкости, протекающей через поперечное сечение потока (его «живое» сечение, т.е. затопленное сечение трубопровода) в единицу времени, называют *расходом жидкости*. Различают *объемный* расход, измеряемый, например, в *$м^3$/сек* или $м^3$/ч, и *массовый* расход, измеряемый в *кг/сек, кг/ч,* и т.д.

В разных точках живого сечения потока скорость частиц жидкости неодинакова. Как показано ниже, около оси трубы скорость максимальна, а по мере приближения к стенкам она уменьшается. Однако во многих случаях закон распределения скоростей в поперечном сечении потока неизвестен или его трудно учесть. Поэтому в расчетах обычно используют не *истинные* (*локальные*) скорости, а фиктивную *среднюю скорость*. Эта скорость w *(м/сек)* выражается *отношением объемного расхода жидкости* Q *(м^3/сек) к площади живого сечения S (м^2) потока:*

$$w = \frac{Q}{S} \tag{1}$$

откуда объемный расход

$$Q = wS \tag{2}$$

Массовый расход *M (кг/сек)* определяется произведением

$$M = \rho w S \tag{3}$$

где ρ – плотность жидкости, *кг/м^3*.

Величина ρw представляет собой массовую скорость жидкости [в *кг/(м$^2 \cdot$ сек*],

$$W = \rho w \tag{4}$$

Приведенные основные характеристики движения жидкостей относятся к их перемещению в каналах с сечением любой формы.

Гидравлический радиус и эквивалентный диаметр. При движении жидкости через сечение любой формы, отличной от круглой, в качестве расчетного линейного размера принимают *гидравлический радиус* или *эквивалентный диаметр*.

Под гидравлическим радиусом $r_г$ (м) понимают *отношение площади затопленного сечения трубопровода или канала, через которое протекает жидкость, т.е. живого сечения потока, к смоченному периметру.*

$$r_г = \frac{S}{П} \tag{5}$$

где S – площадь сечения потока жидкости, м^2; П – смоченный периметр, *м*.

Для круглой трубы с внутренним диаметром d и, значит, площадью свободного сечения S = nd^2/4 при сплошном заполнении его жидкостью П = πd, откуда гидравлический радиус

$$r_г = \frac{S}{П} = \frac{\pi d^2/4}{\pi d} = \frac{d}{4} \tag{6}$$

Диаметр, выраженный через гидравлический радиус, представляет собой эквивалентный диаметр:

$$d = d_э = 4r_г \tag{7}$$

Следовательно, согласно уравнению (5)

$$d_э = \frac{4S}{П} \tag{7a}$$

Эквивалентный диаметр равен диаметру гипотетического трубопровода круглого сечения, для которого отношение площади S к смоченному периметру П то же, что и для данного трубопровода некруглого сечения.

Для канала прямоугольного сечения со сторонами a и b, полностью заполненного жидкостью, гидравлический радиус

$$r_г = \frac{S}{П} = \frac{ab}{2a+2b} = \frac{ab}{2(a+b)} \tag{8}$$

а эквивалентный диаметр

$$d_э = 4r_г = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b} \tag{9}$$

Для канала кольцевого поперечного сечения, в котором жидкость ограничена внутренней и наружной окружностями с диаметрами $d_в$ и $d_н$ соответственно, эквивалентный диаметр

$$d_э = \frac{4S}{П} = \frac{4\left(\frac{\pi d_н^2}{4} - \frac{\pi d_в^2}{4}\right)}{\pi d_н + \pi d_в} = \frac{d_н^2 - d_в^2}{d_н + d_в} = d_н - d_в \tag{10}$$

Для круглой трубы $d_э = d$.

Установившийся и неустановившийся потоки. Движение жидкости является *установившимся*, или *стационарным*, если скорости частиц потока, а также все другие влияющие на его движение факторы (плотности, температуры, давления и др.), *не изменяются во времени в каждой фиксированной точке пространства,* через которую проходит жидкость. В этих условиях для каждого сечения потока расходы жидкости постоянны во времени.

При стационарном движении любой из указанных факторов, например скорость w_x в некотором направлении x, может иметь различные значения в разных точках [$w_x = f(x, y, z)$], но в любой точке скорость не изменяется со временем, т.е. $\frac{\partial w_x}{\partial \tau} = 0$.

Пусть, например, установившееся движение жидкости происходит по трубе переменного сечения. Если за начало координат принять некоторую фиксированную точку на оси трубы, то скорость w_x будет переменна в пространстве, увеличиваясь с уменьшением площади поперечного сечения трубы по оси x и уменьшаясь вдоль осей y и z по мере приближения к стенке трубы. Однако скорость w_x будет постоянна во времени в любой точке.

Примером установившегося движения является истечение воды из крана при постоянном давлении водопроводной сети.

В отличие от стационарного при *неустановившемся*, или *нестационарном*, потоке факторы, влияющие на движение жидкости, *изменяются во времени.* Так, скорость жидкости в определенном направлении x в любой точке является не только функцией пространственных координат x, y и z данной точки, но также времени τ, т.е. $w_x = f(x, y, z, \tau)$. Значит, при этом $\frac{\partial w_x}{\partial \tau} \neq 0$.

Примером неустановившегося движения может служить истечение жидкости из отверстия при переменном уровне ее в резервуаре с понижением высоты столба жидкости в нем скорость истечения уменьшается во времени.

Установившиеся условия движения жидкости характерны для непрерывных процессов химической технологии. Неустановившееся движение жидкости происходит главным образом в периодических процессах или возникает кратковременно при пусках, остановках, а также изменениях режима работы аппаратов непрерывного действия.

Характеризуя различие между установившимся и неустановившимся движением жидкости частной производной по времени некоторого параметра потока (например, скорости $\frac{\partial w_x}{\partial \tau}$), мы рассматривали изменение этого параметра в фиксированной точке пространства, имеющей постоянные координаты.

Для каждой частицы движущейся жидкости изменение ее параметров во времени и в пространстве выражается не частной, а полной производной по времени, называемой в гидродинамике *субстанциональной производной*. По своему смыслу эта производная может быть названа также *производной, следующей за потоком*.

Обозначим через u любую величину, изменяющуюся в потоке как во времени, так и в пространстве, например плотность, температуру, давление, концентрацию жидкости или любую из составляющих w_x, w_y и w_z ее скорости w в направлениях осей координат.

Допустим, что мы наблюдаем за движением потока и можем мгновенно регистрировать значения u в каждый момент времени в данной точке потока. Если наблюдатель неподвижен, то изменение u за единицу времени в фиксированной точке пространства (x, y, z) = const выражается частной производной $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, а изменение u в указанной точке за бесконечно малый промежуток времени $d\tau$ составляет $\frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau$. Эта величина является *местным*, или *локальным*, изменением данной переменной, которое, как отмечалось, при установившемся движении равно нулю.

Если наблюдатель перемещается вместе с потоком (с какой-либо его частицей), то, измеряя значения u, можно установить, что изменение этой величины складывается из двух составляющих.

Так, *конвективное* изменение рассматриваемого параметра u можно выразить так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \qquad (11)$$

Вследствие изменения u во времени в каждой точке пространства в условиях неустановившегося движения $u = f(x, y, z, \tau)$, и за время dτ значение указанного параметра также изменится на $\frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau$. Значит, *полное* изменение u при неустановившемся движении является *суммой локального и конвективного изменений:*

$$du = \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \qquad (12)$$

откуда

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{d\tau} \qquad (13)$$

Однако

$$\frac{dx}{d\tau} = w_x, \qquad \frac{dy}{d\tau} = w_y, \qquad \frac{dz}{d\tau} = w_z \qquad (14)$$

где w_x, w_y и w_z – составляющие скорости вдоль соответствующих осей координат, на которые можно разложить скорость w.

Отсюда

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial u}{\partial x}w_x + \frac{\partial u}{\partial y}w_y + \frac{\partial u}{\partial z}w_z \qquad (15)$$

В частном случае установившегося процесса, когда $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial x}w_x + \frac{\partial u}{\partial y}w_y + \frac{\partial u}{\partial z}w_z \qquad (15а)$$

Уравнения (15) и (15а) выражают субстанциональную производную данного параметра. Субстанциональная производная характеризует изменение какого-либо параметра или свойства материи (субстанции) во времени при перемещении материальных частиц в пространстве. В частности, при движении частицы жидкости со скоростью w конвективное и локальное изменения претерпевают все составляющие скорости вдоль осей координат (w_x, w_y и w_z).

Уравнение неразрывности (сплошности) потока

Установим общую зависимость между скоростями в потоке жидкости, для которого соблюдается условие *сплошности*, или *неразрывности*, движения, т.е. не образуется пустот, не заполненных жидкостью.

Выделим внутри потока элементарный параллелепипед объемом $dV = dxdydz$, ребра которого ориентированы параллельно осям координат (рис. 1).

Пусть составляющая скорости потока вдоль оси x в точках, лежащих на левой грани параллелепипеда площадью $dS = dydz$, равна w_x. Тогда, согласно уравнению (3): $M = \rho w S$, через эту грань в параллелепипед войдет вдоль оси x за единицу времени масса жидкости $\rho w_x dydz$, а за промежуток времени $d\tau$ – масса жидкости

$$M_x = \rho w_x dydzdxd\tau$$

где ρ – плотность жидкости на левой грани параллелепипеда.

На противоположной (правой) грани параллелепипеда скорость и плотность жидкости могут отличаться от соответствующих величин на левой грани и будут равны $\left(w_x + \frac{\partial w_x}{\partial x}dx\right)$ и $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}dx\right)$. Тогда через правую грань параллелепипеда за то же время $d\tau$ выйдет масса жидкости

$$M_{x+dx} = \left[\rho w_x + \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dx\right] dydzd\tau$$

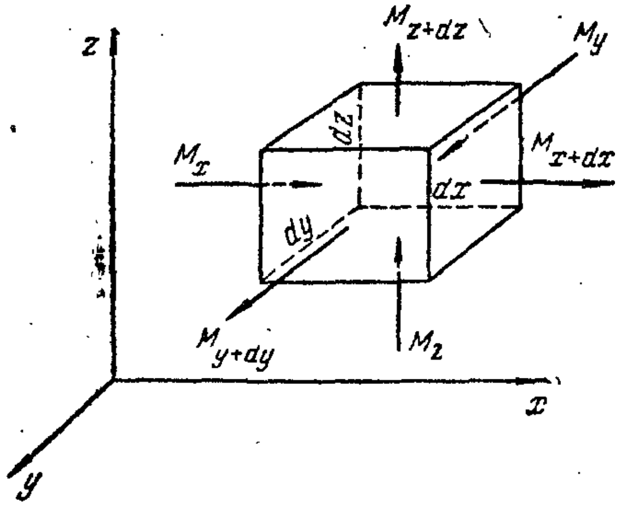

Рис. 1. К выводу дифференциального уравнения неразрывности потока

Приращение массы жидкости в параллелепипеде вдоль оси *x*:

$$M_x = M_x - M_{x+dx} = -\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} dxdydzd\tau$$

Если составляющие скорости вдоль осей *y* и *z* равны w_y и w_z соответственно, то приращения массы в элементарном объеме вдоль этих осей по аналогии составят:

$$dM_y = -\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} dydxdzd\tau$$

$$dM_z = -\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} dzdxdyd\tau$$

Общее накопление массы жидкости в параллелепипеде за время $d\tau$ равно сумме ее приращений вдоль всех осей координат:

$$dM = -\left[\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}\right] dxdydzd\tau$$

Вместе с тем изменение массы в полностью заполненном жидкостью объеме параллелепипеда возможно только вследствие изменения плотности жидкости в этом объеме. Поэтому

$$dM = \frac{\partial\rho}{d\tau} dxdydzd\tau$$

Приравнивая оба выражения *dM*, сокращая на (-*dxdydz*) и перенося $\frac{\partial\rho}{d\tau}$ в левую часть уравнения, окончательно получим

$$\frac{\partial\rho}{d\tau}+\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}=0 \qquad (16)$$

Уравнение (16) представляет собой *дифференциальное уравнение неразрывности потока для не установившегося движения сжимаемой жидкости*.

Уравнение (16) может быть записано и в несколько иной форме. Проводя дифференцирование произведений ρw, получим

$$\frac{\partial\rho}{d\tau}+\frac{\partial\rho}{\partial x}w_x+\frac{\partial\rho}{\partial y}w_y+\frac{\partial\rho}{\partial z}w_z+\frac{\partial w_x}{\partial x}\rho+\frac{\partial w_y}{\partial y}\rho+\frac{\partial w_z}{\partial z}\rho=0$$

или

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{d\tau}+\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}=0 \qquad (16а)$$

где $\frac{\partial\rho}{d\tau}$ – субстанциональная производная плотности.

В установившемся потоке плотность не изменяется во времени, т.е. $\frac{\partial\rho}{d\tau}=0$, и уравнение (16) принимает вид

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z}=0 \qquad (17)$$

Для капельных жидкостей, которые практически несжимаемы, а также для газов в условиях изотермического потока при скоростях, значительно меньших скорости звука, ρ = const и, следовательно

$$\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}+\frac{\partial w_z}{\partial z}=0 \qquad (18)$$

Уравнение (18) является *дифференциальным уравнением неразрывности потока несжимаемой жидкости*.

Сумма изменений скорости вдоль осей координат в левой части уравнения (18) называется дивергенцией вектора скорости и обозначается через div *w*. Поэтому данное уравнение можно представить как

$$\mathrm{div}\, w = 0 \qquad (18а)$$

Для того чтобы перейти от элементарного объема ко всему объему жидкости, движущейся сплошным потоком (без разрывов и пустот) по трубопроводу переменного сечения (рис. 2), проинтегрируем дифференциальное уравнение (17).

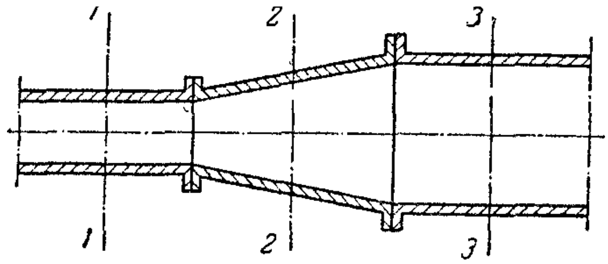

Рис. 2. К выводу уравнения постоянства расхода

Если бы площадь сечения трубопровода не изменялась, то для установившегося однонаправленного движения (в направлении оси x) интегрирование уравнения (17) дало бы зависимость

$$\rho w = \text{const}$$

где w – средняя скорость жидкости.

Если же площадь сечения S трубопровода переменна, то, интегрируя также по площади, получим

$$\rho w S = \text{const} \quad (19)$$

Для трех различных сечений (*1—1*, *2—2* и *3—3)* трубопровода, изображенного на рис. 2, имеем

$$\rho_1 w_1 S_1 = \rho_2 w_2 S_2 = \rho_3 w_3 S_3 \quad (19а)$$

или

$$M_1 = M_2 = M_3$$

где $M = \rho w S$ – массовый расход жидкости, *кг/сек.*

Выражение (19) или (19а) представляет собой *уравнение неразрывности (сплошности) потока в его интегральной форме* для установившегося движения. Это уравнение называется также *уравнением постоянства расхода*.

Согласно уравнению постоянства расхода, *при установившемся движении жидкости, полностью заполняющей трубопровод, через каждое его поперечное сечение проходит в единицу времени одна и та же масса жидкости.*

Для капельных жидкостей $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ const, и уравнение (19) принимает вид

$$wS = \text{const} \quad (20)$$

Следовательно

$$w_1 S_1 = w_2 S_2 = w_3 S_3 = \text{const} \quad (20а)$$

или

$$Q_1 = Q_2 = Q_3$$

где $Q = wS$ – объемный расход жидкости, *м^3/сек.*

Из уравнения (20а) следует, что *скорости капельной жидкости в различных поперечных сечениях трубопровода обратно пропорциональны площадям этих сечений.*

Согласно уравнению (19), массовый расход жидкости через начальное сечение трубопровода равен ее расходу через конечное сечение трубопровода. Таким образом, *уравнение постоянства расхода является частным случаем закона сохранения массы и выражает материальный баланс потока.*

В некоторых случаях, например при вскипании жидкости вследствие резкого понижения давления, образуется пар, что может привести к разрыву потока. В таких условиях, наблюдаемых иногда при работе насосов, уравнение неразрывности потока не выполняется.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение гидродинамики.
2. Охарактеризуйте основные характеристики движения жидкостей.
3. Приведите вывод уравнения неразрывности (сплошности) потока.

Литература

1. Лекции по курсу «Основные процессы и аппараты химической технологии»: учебно-методическое пособие / составители: Ж.Т. Ешова, Д.Н. Акбаева. – Алматы: Қазақ университеті, 2017. – 392 с. – 40 экз.
2. Касаткин А.Г. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1973. – 752 с.
3. Романков П.Г., Фролов В.Ф., Флисюк О.М. Методы расчёта процессов и аппаратов химической технологии (примеры и задачи). – Санкт-Петербург: ХИМИЗДАТ, 2009. – 544 с.